Calculs de probabilités

Exercice 1: On lance un dé à 6 faces truqué : la probabilité d'obtenir le chiffre $k \in [\![1;6]\!]$ est proportionnelle à k. Calculer la probabilité d'obtenir un chiffre pair.

Exercice 2: On lance 6 fois de suite un dé équilibré.
Déterminer la probabilité d'obtenir les 6 numéros au cours des 6 lancers.

Exercice 3: On distribue 5 cartes d'un jeu de poker (jeu de 52 cartes). Déterminer la probabilité :

1. d'obtenir un carré (4 cartes de même valeur) ;
2. d'obtenir une couleur (5 cartes de la même couleur ; les couleurs sont cœur, carreau, pique, trèfle) ;
3. d'obtenir une suite (5 cartes dont les valeurs se suivent dans l'ordre suivant : A (as), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (valet), Q (dame), K (roi), A ; l'as compte à la fois comme valeur inférieure et comme valeur supérieure).

Exercice 4: On distribue les cartes au bridge (chaque joueur reçoit 13 cartes d'un jeu de 52 cartes). Quelle est la probabilité que chaque joueur reçoive un as ?

Exercice 5: On considère qu'une année comporte 365 jours (pour simplifier). Dans une classe de 48 étudiants, quelle est la probabilité pour qu'au moins deux étudiants soient nés le même jour ? Combien doit-il y avoir d'étudiants pour que cette probabilité dépasse 50 % ? *On pourra utiliser Python pour cette dernière question.*

Probabilités conditionnelles

Exercice 6: On dispose d'un dé à 20 faces et de 20 urnes numérotées de 1 à 20.
L'urne numéro $k \in [\![1;20]\!]$ comporte k boules blanches et $20-k$ boules noires, les boules étant indiscernables au toucher. On lance le dé, puis on tire au hasard une boule dans l'urne dont le numéro correspond au résultat du dé.
Déterminer la probabilité :

1. d'obtenir une boule noire ;
2. que le résultat du dé soit 1 sachant que la boule tirée est noire.

Exercice 7: Une compagnie d'assurance estime que ses clients se divisent en deux catégories : les clients enclins aux accidents, représentant 20% de la population, et ceux qui ont peu d'accidents. La probabilité d'avoir au moins un accident par an est 0,5 pour les personnes de la première catégorie et 0,1 pour ceux de la seconde.
Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat ?

Exercice 8: Une puce effectue des sauts aléatoires sur les sommets d'un triangle ABC. À chaque saut, elle peut soit sauter sur place avec la probabilité p, soit sauter vers un des deux autres sommets, avec la probabilité q pour chaque sommet. On suppose que la puce est initialement placée en A. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n, respectivement B_n, C_n, les événements : " Après le n-ième saut, la puce est au point A, respectivement B, C " et a_n, b_n, c_n leurs probabilités respectives.

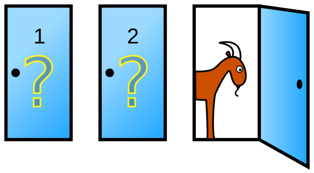
1. Démontrer une relation entre p et q puis montrer que $q \in [0; \frac{1}{2}]$.
2. Justifier que $a_{n+1} = (1-2q)a_n + qb_n + qc_n$.
3. Déterminer des relations similaires pour b_{n+1} et c_{n+1}. En déduire une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
4. Écrire M comme combinaison linéaire de I_3 et U, où U est la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1, puis calculer M^n à l'aide de la formule du binôme.
5. En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n, puis calculer leurs limites lorsque $n \to +\infty$. Interpréter ce résultat.

Exercice 9: Le fonctionnement d'un appareil obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n \in \mathbb{N}$, il a la probabilité $a \in]0;1[$ de fonctionner à la date $n+1$;
- s'il est en panne à la date $n \in \mathbb{N}$, il a la probabilité $b \in]0;1[$ d'être en panne à la date $n+1$.

On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il soit en état de marche à la date n.
Établir une relation de récurrence sur la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis en déduire l'expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10: [*] Le jeu du *Monty Hall* oppose un candidat à un présentateur. Ce candidat est placé devant trois portes fermées, il pourra repartir avec le contenu derrière la porte choisie. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des autres se trouve une chèvre. Il doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait où est la voiture). Le candidat doit ouvrir la porte qu'il a choisie initialement ou bien ouvrir la porte qui est encore fermée.
Que doit faire le candidat ? Quelles sont ses chances de gagner la voiture selon la stratégie choisie ?



Exercice 11: On dispose de 4 dés dont un est pipé.
Pour le dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 4 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit le dé pipé?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 4 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 12: On dispose de deux urnes opaques, nommées A et B, composées respectivement de 2 et 5 boules blanches. On place à votre insu une boule dorée dans l'une des deux urnes. Votre but est de retrouver la boule dorée en effectuant des tirages avec remise.
On pourra noter A (resp. B) l'évènement : "la boule dorée est dans l'urne A (resp. B)" et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n (resp. B_n) l'évènement : "en effectuant le n-ième tirage dans l'urne A (resp. B), on trouve la boule dorée".

1. Dans quelle urne est-il judicieux de faire son premier tirage ?
2. Lors de ce tirage, vous ne trouvez pas la boule dorée. Dans quelle urne effectuez-vous votre prochain tirage ?
3. Encore loupé, dans quelle urne est-il judicieux de faire votre troisième tirage ?

Indépendance

Exercice 13: On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. On note D l'événement : " la carte tirée est une dame ".
Pour tout $i \in [\![1;5]\!]$, étudier l'indépendance des événements D et A_i :

1. A_1 : " la carte est un pique ".
2. A_2 : " la carte est noire " (pique ou trèfle).
3. A_3 : " la carte est une figure " (un roi, une dame ou un valet).
4. A_4 : " la carte n'est pas un as ".
5. A_5 : " la carte est la dame de pique ".

Exercice 14: On lance trois fois de suite une pièce équilibrée, et on considère les événements suivants :

- A : " le premier lancer donne pile " ;
- B : " le deuxième lancer donne face " ;
- C : " les trois lancers donnent le même résultat ".

Étudier l'indépendance mutuelle et l'indépendance deux à deux des événements A, B et C.

Exercice 15: Une urne U_1 contient deux boules blanches et une boule rouge.
Une urne U_2 contient deux boules rouges et une boule blanche.
On lance un dé : s'il fait 6, on choisit l'urne U_1, et sinon U_2 ; puis on tire deux boules successivement et avec remise dans l'urne qui a été choisie.
On définit les événements :

- B_1 : " la première boule tirée est blanche " ;
- B_2 : " la seconde boule tirée est blanche ".

Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 16: Refaire l'exercice précédent en considérant les tirages sans remise.